1-2　棒の引張と圧縮・・応力度とひずみ度

(1)　複雑なトラスについて学ぶ前に, もっとも基本となる, 棒の引張と圧縮について学ぶことにする。まず，アドレスhttp://archi2.ace.nitech.ac.jp/ichi2/に接続し，画面右下の「構造力学入門」のボタンを押してみよう。

(2)　次に,「トラス構造」のボタンを押すと図1.2.1のような初期画面が現れる。これらは1章で学ぶ種々のトラスを表している。このうち最も単純な一番左上のトラスをクリックして，しばらく待つ。じっくり勉強しようという人は，前のページで「ダウンロード」ボタンを押した方がよいかもしれない。

(3)　この棒の左端は, 図1.2.2(a)のように回転は自由にできるが, 上下左右には移動できないように支持してあるものとする。このような支持方法を「**ピン支持**」という。棒の右端は，図1.2.2(b)(c)のように，回転および左右の移動は自由

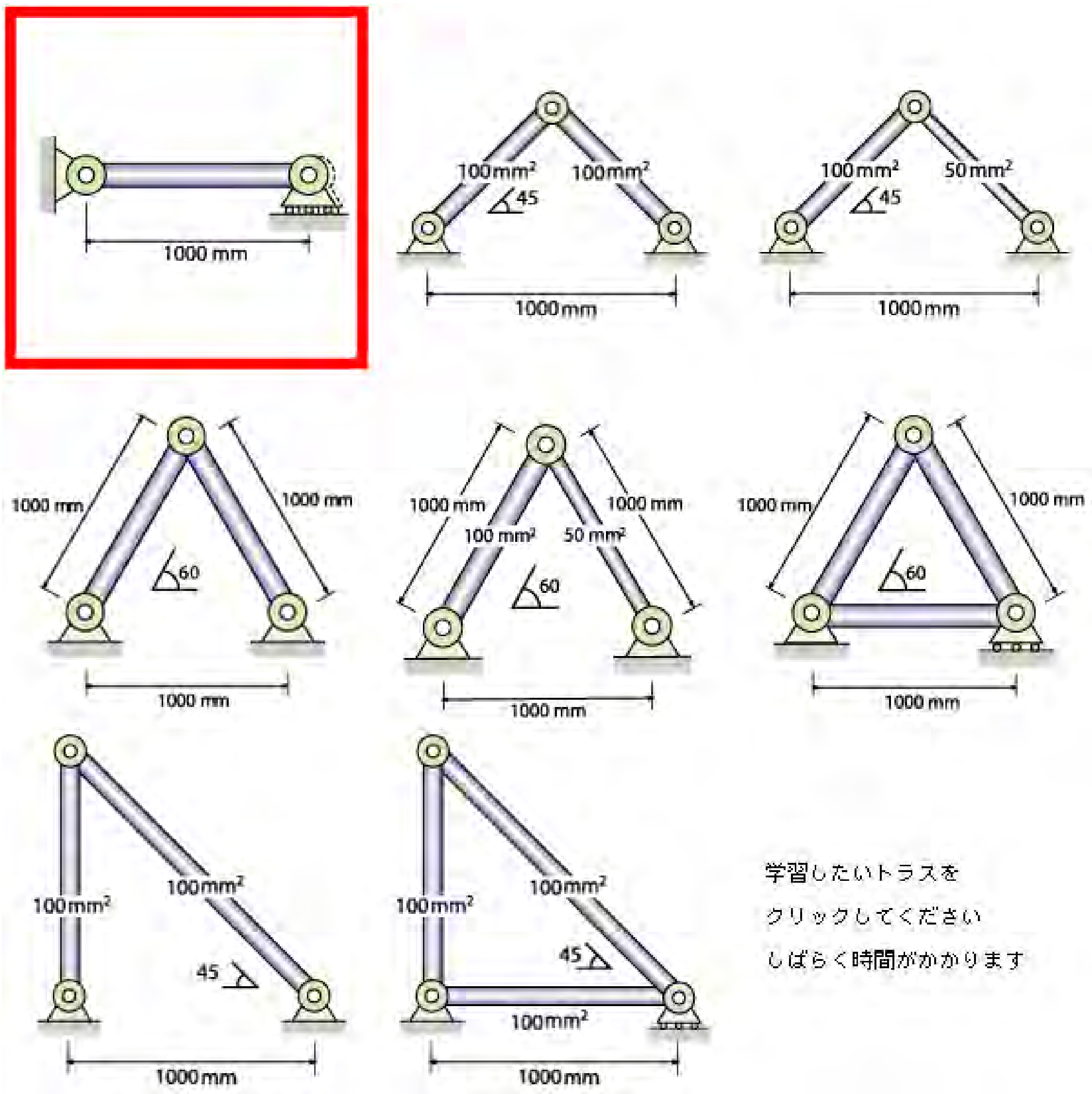
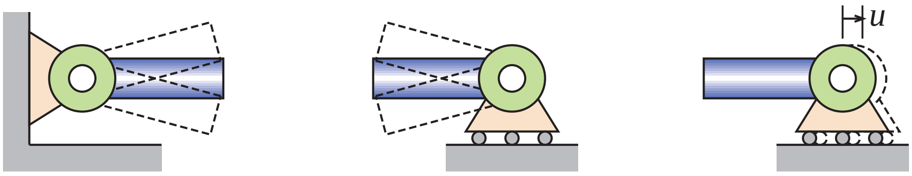


図 1.2.1　「トラス構造」初期画面

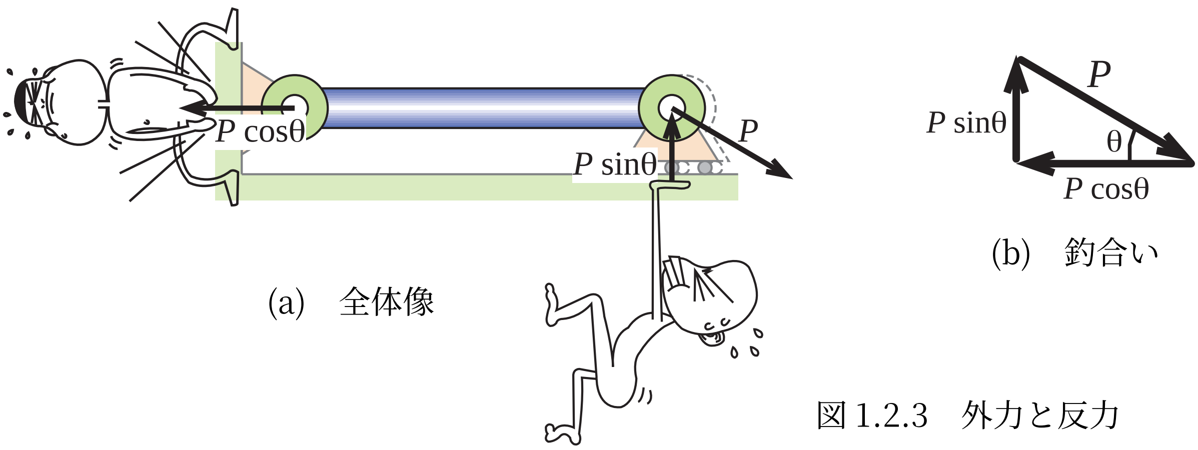
にできるが，上下には移動できないように支持してあるものとする。このような支持方法を「**ローラー支持**」という[*1]。

(4)　棒の右端を左クリックしたまま右下に移動（ドラッグ）してみよう（図1.2.3(a)）。画面に矢印が現れ，加力点が移動する。矢印は加力点に加わる力を表している。図1.2.3(b)に示すように，外力Pを水平成分$P\cos\theta$（シータ）と鉛直成分$P\sin\theta$に分解する。水平成分$P\cos\theta$は棒を介して左端のピン支点まで伝わる。このとき，棒は$P\cos\theta$の力で左右に引っ張られる。このような作用を「軸力（じくりょく）」axial forceと呼ぶ。軸力の記号は，通常Nで表す。引張（ひっぱり）tensionを正，圧縮compressionを負とする。図1.2.3(a)右端の上向きの矢印は，床が棒を押す力（床から棒に加わる力）を表す。このような力を「反力（はんりょく）」reactionと呼ぶ。外力の鉛直成分$P\sin\theta$が反力と釣り合うことがわかる。左端の矢印は壁が棒を引っ張る力（壁から棒に加わる力＝反力）であり，外力の水平成分$P\cos\theta$と釣り合う（→重要ポイント1）。



(a) ピン支持の回転　(b) ローラー支持の回転　(c) ローラー支持の移動

図1.2.2　ピン支持とローラー支持



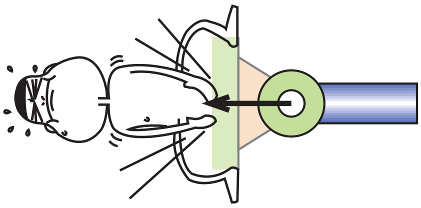
(a)　全体像　(b)　釣合い

図1.2.3　外力と反力

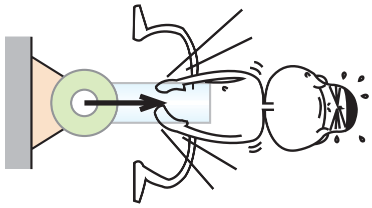
---

*1　わざわざ移動できるような支持をする必要があるだろうかという疑問を持つかもしれないが，大規模な構造物ではローラー支持が必須となる。夏冬の温度変化により構造物が伸縮するので，両端をピン支持とすると余分な力が加わって危険となるからである。

重要ポイント1：　下図(a)のように壁から棒に加わる力は左向きだが，棒から壁に加わる力は下図(b)のように右向きである。つまり床は右方向に引っ張られる。力の向きは受ける主体によって正反対になる。これは，ニュートンの第3法則（作用・反作用の法則）である。

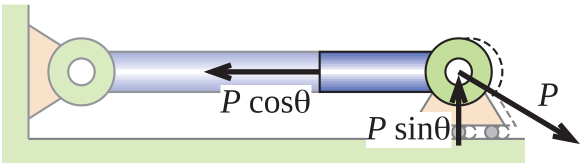


(a)　壁から棒に加わる力

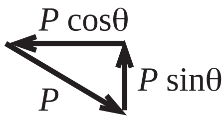


(b)　棒から壁に加わる力

この例題は非常に単純であるから，上記の説明だけで十分かもしれないが，これを別の面から理解するため，図1.2.4(a)のように棒を仮想的に切断して釣合いを考えてみる。このやり方は複雑なトラスで軸力を知るために不可欠なテクニックである。図1.2.4(a)が釣り合うためには，図1.2.4(b)のように力のベクトルが閉じた三角形を描くことが必要であり，棒の軸力が$N = P\cos\theta$となることが理解できる（→重要ポイント2）。



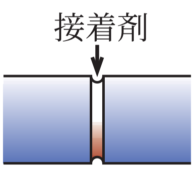
(a) 切断

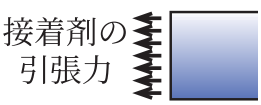


(b) 釣合い

図1.2.4　加力点付近の釣合い

重要ポイント2：　本当に切ったら力は伝わらないのではと心配する読者も多いだろう。むしろ，切ったあと強力な接着剤でくっつけてもう一度力を加えた状態を考えた方がよいかもしれない。接着剤は，$N = P\cos\theta$の力で切断面を左向きに引っ張る（下図参照）。





切断面の左側でも同様である。接着剤は, $N = P$　$\cos\theta$ の力で切断面を右向きに引っ張る。これも作用・反作用の法則である。

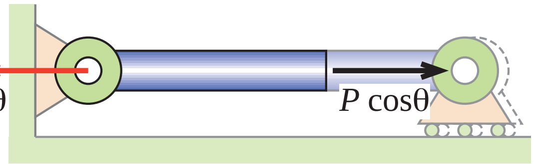
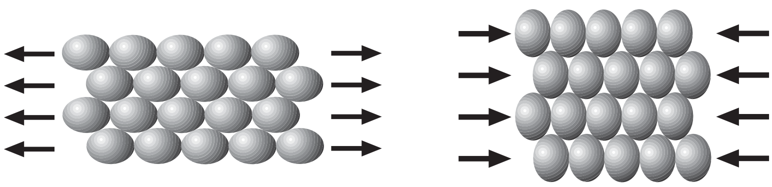


図 1.2.5　切断面左側の釣合い

(5)　なぜ棒が伸縮するかを理解するには，図 1.2.6 を参照されたい。この棒は，鋼材でできているものとする。各々の球は，鉄の原子を表している。鉄の原子が伸縮するから，棒の伸び縮みが生じるのである[*1]。

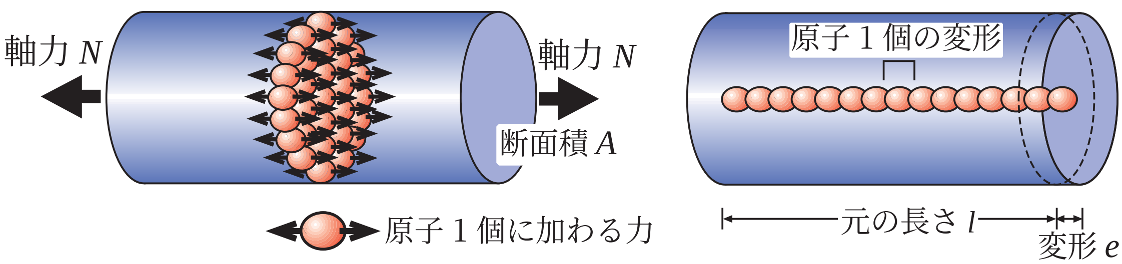
(6)　物質の伸び縮みの性質を表すには，次式のような**応力度**（おうりょくど）**σ**（シグマ）と**ひずみ度 ε**（イプシロン）を定義すると都合がよい[*2]。

応力度　$\sigma = \dfrac{N}{A}$	N:　軸力(引張を正とする) A:　断面積(Area)	(1.2.1)超重要
ひずみ度　$\varepsilon = \dfrac{e}{l}$	e:　変形(伸びを正とする) l:　元の長さ(length)	(1.2.2)超重要



(a)　引張　　　(b)　圧縮

図 1.2.6　鉄原子の変形



(a)　応力度　　　(b)　ひずみ度

図 1.2.7　応力度とひずみ度の定義

*1　厳密には鉄の原子そのものが変形するのではなく，自由電子の共有によって生じる原子間の構造が伸縮するが，これを図示してもわかりにくいので図のような表現とした。

*2　建築構造分野では長らく「応力度」「ひずみ度」という呼称を用いてきた。ただし，土木，機械など建築以外の分野ではすべて「応力」「ひずみ」と呼んでいるので注意が必要である。英語では stress,　strain という。

力を断面積で割ると都合がよいのは，単位面積あたりに含まれる原子の数が決まっており，図1.2.7(a)のように1個あたりの原子が受ける力に換算できるからである。変形を長さで割ると都合がよいのは，単位長さあたりに並ぶ原子の数が決まっており，図1.2.7(b)のように1個あたりの原子の伸縮量に換算できるからである。

力の単位は通常，N（ニュートン）で表される[*3]。軸力の記号Nと紛らわしいが，軸力は斜体で表されることで区別されたい。また，断面積の単位は通常mm^2で表される。したがって，応力度の単位はN/mm^2である。これは気圧など圧力の単位と同じである。ひずみ度は，定義式の分子・分母が長さの単位を持つため，単位はない。ただし，通常の状態でのひずみ度は非常に小さいので，10^{-6}をμ（マイクロ）で表示することもある。たとえば1mの棒が0.5mm伸びたときのひずみ度$0.5/1000 = 500 \times 10^{-6}$を500 μと表示する場合がある。

(応力度)＝(力)/(断面積)という概念は，日常的なものである。たとえば図1.2.8のように太い棒は打ち込みにくいが，細い棒は打ち込みやすい。

(変形)＝(ひずみ度)×(元の長さ)という概念も，日常的なものである。たとえば，ゴムひもは元の長さが長いほど伸びやすい（つまり変形しやすい）。

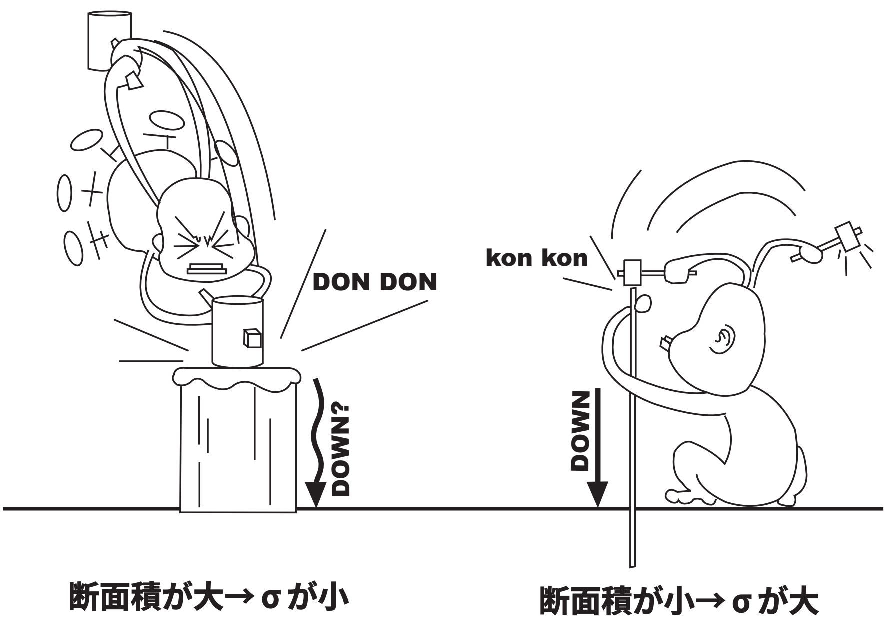


図1.2.8　細い棒は打ち込みやすい

*3　1　Nは0.1　kgのおもりをぶら下げたときの力にほぼ等しい。厳密には，1　kgの質量に1　m/s^2の加速度を与えるために必要な力と定義される。

ソフトで演習：　部材の右端を左右にドラッグして，外力Pと移動量uの関係をグラフに描いてみよう。図1.2.9(a)のような直線になるはずである。しかも，外力が+100　Nを超えると棒の色が青く，-100　Nを超えると赤く変わる。これは，棒が引張または圧縮で破壊したことを表す。ソフトでは，棒の断面積をA　=　100　mm²と設定している。この場合，棒の軸力Nは外力Pと等しいから，$\sigma = N/A$より，材料の引張・圧縮強度が1 N/mm²であったことがわかる。さらに，ソフトでは棒の長さをl =　1000　mmと設定している。したがって，破壊時のひずみ度は$\varepsilon = e/l$より0.5×10^{-3}である（単位なし）。

　この図のように，応力度とひずみ度が比例関係にあるとき，この性質を「弾性」と呼ぶ。また，この比例係数をThomas Young (1773-1859)という英国の科学者にちなんで「**ヤング係数**」または「**ヤング率**」と呼ぶ。また，記号にはEを用いる。すなわち，

$$\boxed{E = \sigma / \varepsilon \qquad (1.2.3)（超重要）}$$

である。ヤング係数が大きい材料ほど，同じ応力度で生じるひずみ度は小さい。すなわち，ヤング係数が大きい材料ほど変形しにくい。ヤング係数Eの単位は応力度と同じくN/mm²である。これは，ひずみ度に単位がないためである。本ソフトの場合，ヤング係数は$E = \sigma / \varepsilon$より2×10^3 N/mm²である。引張・圧縮強度はそのままでヤング係数だけを半分にしたら図1.2.9(a)はどんなグラフになるだろう？

　次に，図1.2.10のように，いろいろな方向に力を与えて破壊の限界を調べてみよう。外力の水平成分P_xが±100　Nになるときが限界であることがわかる引

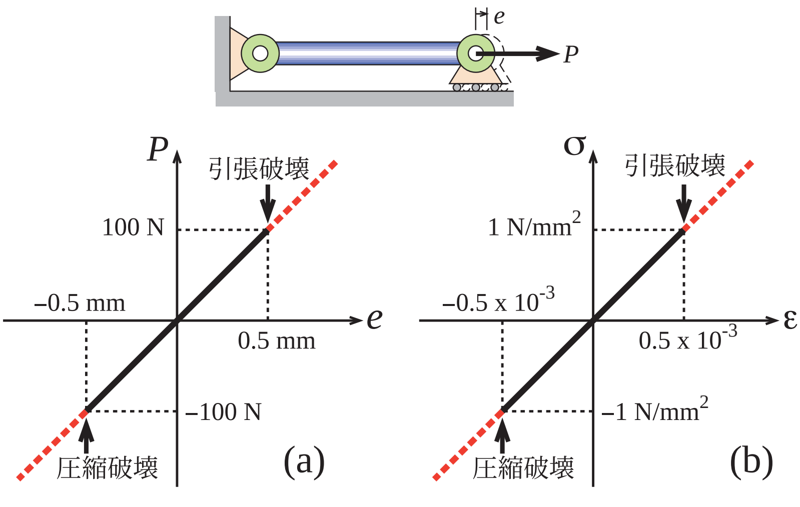


図1.2.9　左右に加力してみる

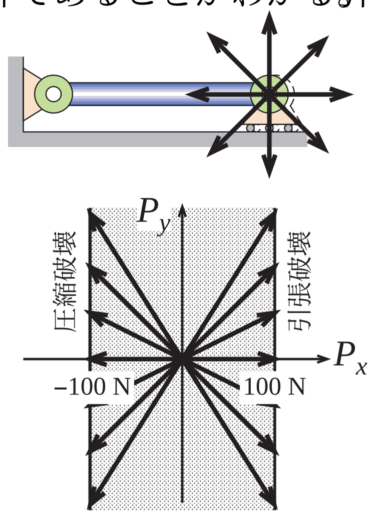


図1.2.10　いろいろな方向に加力

張強度はそのままで圧縮強度だけを2倍にしたら図1.2.10はどんなグラフになるだろう？

くどいようだが，材料の強さとヤング係数は別物である。ゴードンの著書「構造の世界」にあるように，ビスケットは剛だが弱い。ナイロンは柔らかいが強い。いろいろな材料のヤング係数と引張強度を図1.2.11に示す。腱（筋肉と骨をつなぐ繊維）は，骨とほぼ同じ強度だが，骨よりずっと軟らかい。鋼材のヤング係数は強度にかかわらず約20万 N/mm² であり覚えておくと便利。

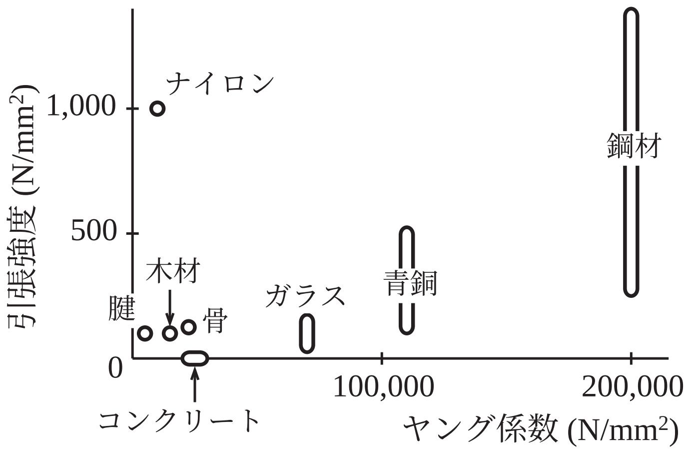
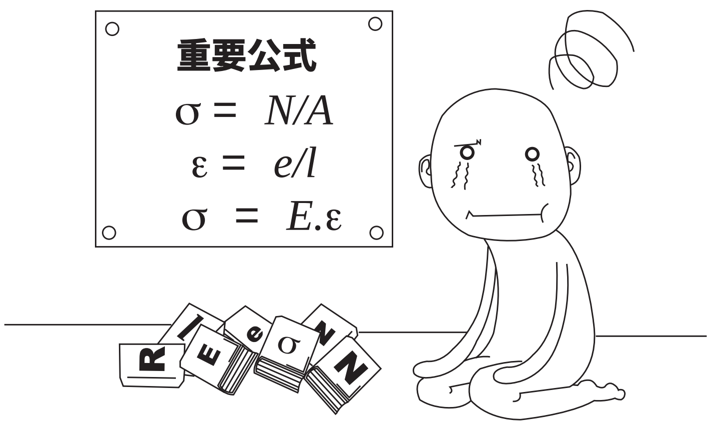


図 1.2.11　引張強度とヤング係数
（木材は繊維方向の値）



やや上級：実際の材料では，応力度とひずみ度の関係はかなり複雑である。現代の代表的な建設材料である鋼材，コンクリート，木材の応力度 - ひずみ度特性を図 1.2.12 に示す。鋼材は，引張・圧縮とも「降伏強度」と呼ばれる値（200～1000 N/mm² 程度）の値に達すると比例関係を失い，σ一定のままひずみ度だけが増加するようになる。コンクリートは圧縮側ではまあまあの強度（20～100 N/mm² 程度）を示すが，引張強度は圧縮の約1/10であり，極めて脆弱なので図中には描いていない。木材は引張に比べると圧縮側でやや弱い。ただし，いずれの材料も，ひずみ度が小さい領域に限定すれば，応力度とひずみ度は比例関係を持つ。

ホームページ http://archi2.ace.nitech.ac.jp/

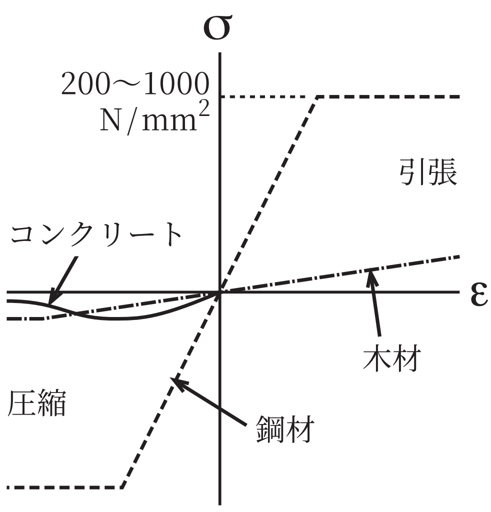
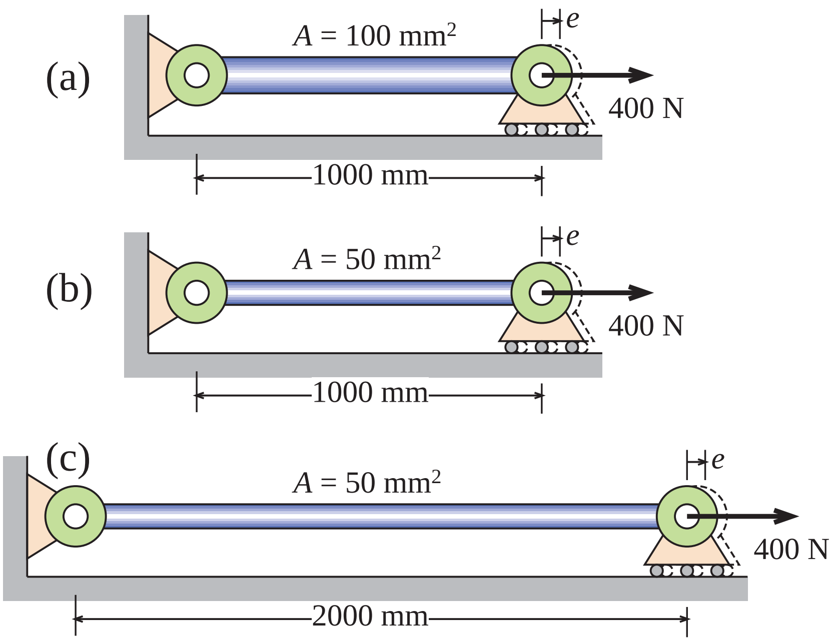


図 1.2.12　応力度 - ひずみ度特性の例

ichi2/kyokasho/2/ では，鋼を切断するまで引っ張った様子や，コンクリートを圧縮して破壊する様子を応力度 - ひずみ度特性とともに示している。

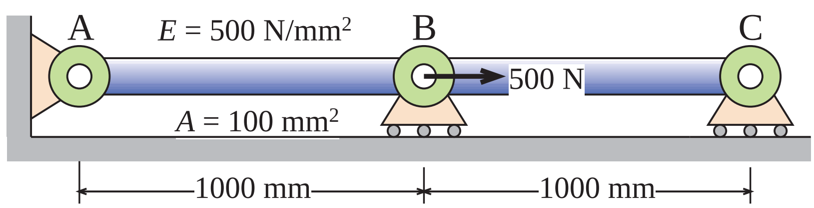
例題1.2.1　下図(a)(b)(c)の棒に生じる応力度 σ，ひずみ度 ε および棒の伸び e を計算しなさい。ただしヤング係数はすべて E = 200 N/mm^2 とする。



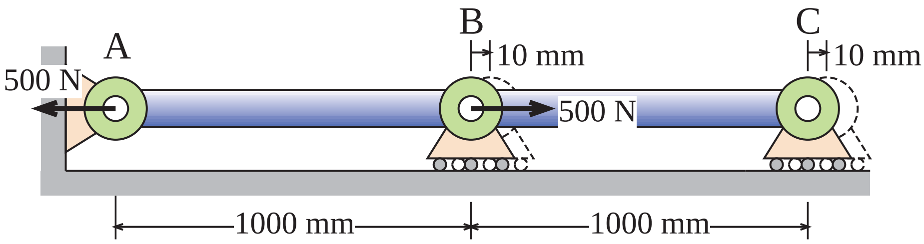
解答　$\sigma = N/A$,　$\varepsilon = \sigma/E$,　$e = \varepsilon l$ に数値を代入して，右の表のようになる。部材が細長いほど伸びが大きくなることがわかる。

	応力度 (N/mm^2)	ひずみ度 (単位なし)	伸び (mm)
(a)	4	0.02	20
(b)	8	0.04	40
(c)	8	0.04	80

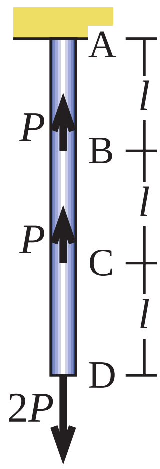
例題1.2.2　下図のB点に右向きの力500　Nが加わるとき，左右の部材に生じる応力度 σ，ひずみ度 ε を計算しなさい。また，BおよびCの移動量（これを**変位**（へんい）という）を求めなさい。ただし，部材の断面積 A　とヤング係数 E は左右で同一であるものとする。



解答　C点はローラー支持されているので，水平方向の反力は生じない。これに対し，A点はピン支持なので，水平方向の反力が生じる。よって，下図のように，500　Nの力は左側の部材ABを通じてA点に伝わり，部材ABには500　Nの引張軸力が生じる。部材ABの応力度は$\sigma = 5$　N/mm^2，ひずみ度は$\varepsilon = 0.01$であり，右側の部材BCは応力度，ひずみ度ともゼロである。次に，部材ABには10 mmの伸びが生じ，部材BCは伸縮ゼロである。A点が固定されているため，B点，C点とも変位は右方向に10　mmである。

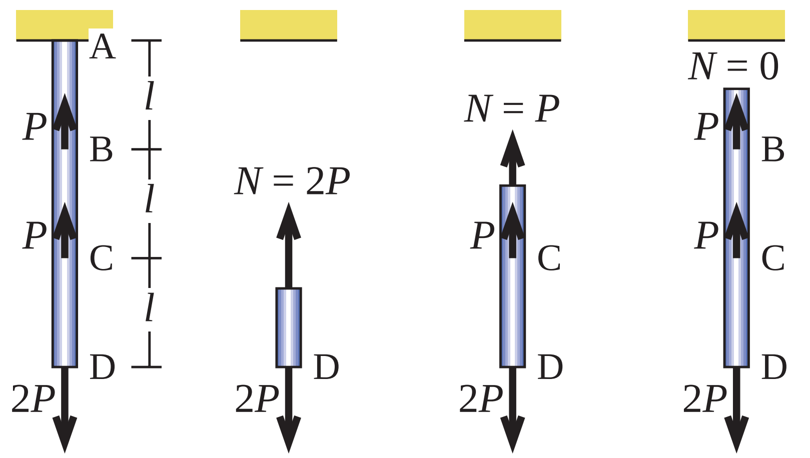


例題1.2.3　右図のような棒に力P，　P，　2Pが矢印の向きに作用している。このとき，棒の下端の変位として正しいものは次のうちどれか。ただし，棒の断面積をA，　ヤング係数をEとし，自重は無視するものとする。（一級建築士1993）



1.　0　　2.　$\dfrac{l}{AE}P$　　3.　$\dfrac{2l}{AE}P$　　4.　$\dfrac{3l}{AE}P$　　5.　$\dfrac{4l}{AE}P$

解答　このように複数の外力が加わる場合，棒の各部に生じる軸力を知るには，棒を仮想的に切断してみるとよい。たとえば，右図(b)のようにCD間で切断することにより，CD間の軸力が2Pであることが



(a) 元の状態　(b) CD 間で切断　(c) BC 間で切断　(d) AB 間で切断

わかる。したがって，CD 間には応力度 σ＝N / A＝2P/A が発生し，ひずみ度 ε＝σ /E＝2P/EA が生じる。よって，CD 間の棒の伸びは，e＝ε l＝2Pl/EA である。同様に，BC 間の軸力は P であり，BC 間の伸びは，Pl/EA である。また，AB 間の軸力はゼロであり，AB 間の伸びもゼロである。これらを加えると，棒全体の伸びは

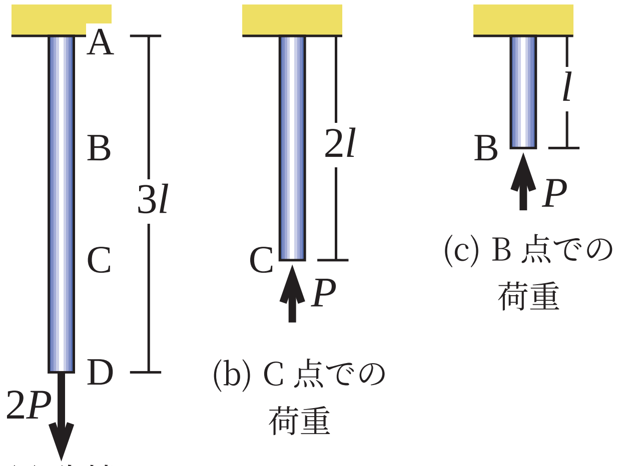
$$e = \frac{2Pl}{EA} + \frac{Pl}{EA} = \frac{3Pl}{EA}$$

となり，4. が正しいことがわかる。

なお，この問題は，右図のように，2Pの引張力による伸び量と，C，B点に加わる P の圧縮力による縮み量を足しあわせて，

$$e = \frac{6Pl}{EA} - \frac{2Pl}{EA} - \frac{Pl}{EA} = \frac{3Pl}{EA}$$

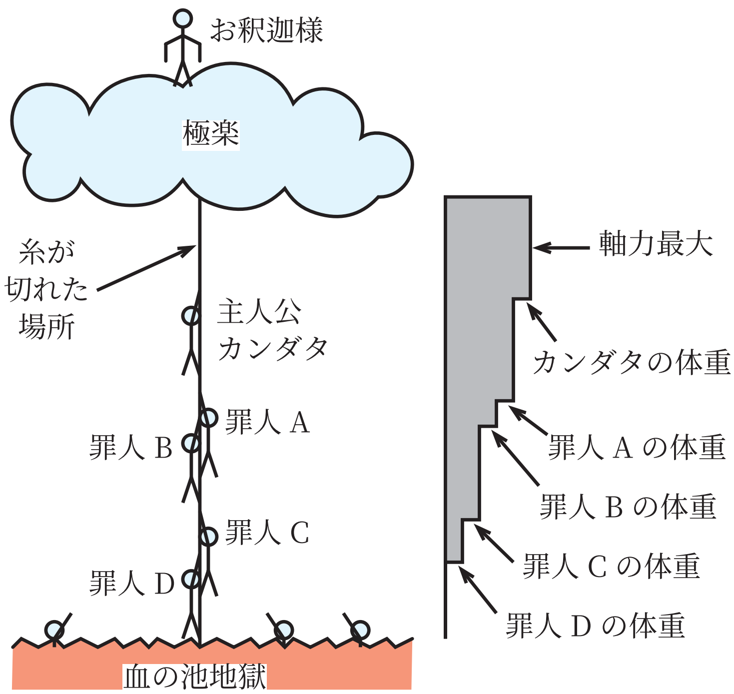
と考えてもよい。



(a) 先端のみの荷重
(b) C 点での荷重
(c) B 点での荷重

演習：　D 点に下向きの 3P，　C 点に上向きの 2P の力が加わるとき，C 点と D 点の変位（移動量）を求めなさい。（ヒント：AC 間，CD 間の軸力と伸びを計算しなさい）

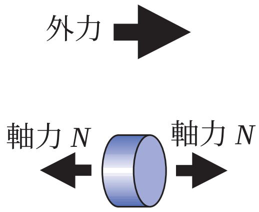
オマケ：芥川龍之介の小説「蜘蛛の糸」では，主人公カンダタのすぐ上で糸がプッツリ切れることになっている。大勢の人間がぶら下がったときの軸力分布は右図のようになり，軸力は極楽とカンダタの間で最も大きくなるから，小説の記述は正しい。



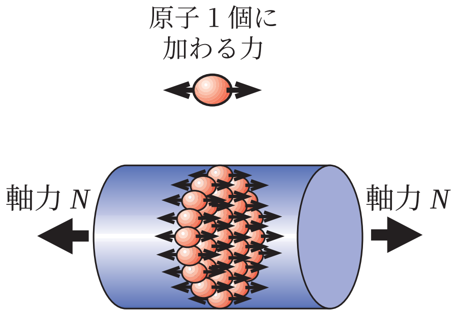
軸力とは？

今ひとつしっくりこないんですよね。一体，外力と軸力は根本的にどう違うんですか？

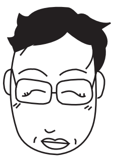
これは鋭い質問ね。まず，外力は一本の矢印で表されるベクトルです。右向きとか左向きとか方向を持っているでしょ。これに対し，軸力とは，部材が引っ張られているとか圧縮されているといった「状態」を表す値であって，ベクトルではないのよ。一本の矢印ではなく，一対の矢印で表す必要があるんです。



うーん，ちょっと話が抽象的だね。むしろ，部材を構成する原子に注目した方がわかりやすいかもしれない。引っ張られている部材の中では原子も引っ張られている。その場合でも，原子に働く力は必ず逆向きのペアだね。一本の矢印（ベクトル）ではないんだ。原子に働くペアの力を部材断面全体で足しあわせたものが軸力である，といえば納得できるかな。



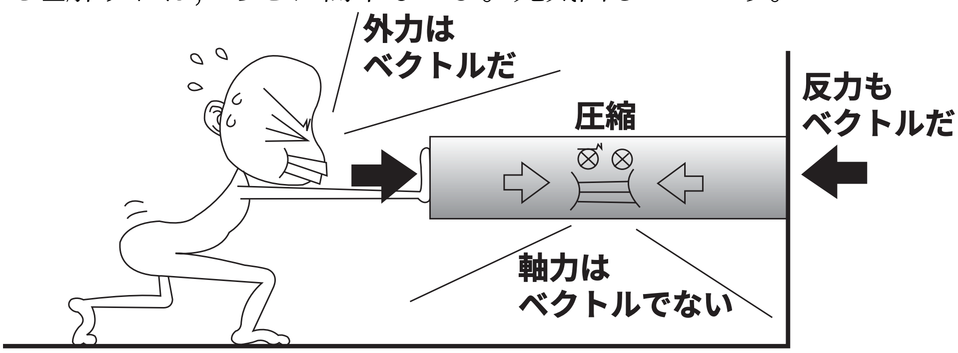
だから軸力は一対の矢印ってワケか。それじゃ，反力はベクトルですか？



反力はベクトルだよ。「壁から棒への反力」というように方向があるからね。外力も反力も，構造物に外から加わる力という意味では同じなんだ。

そうか，外力と反力のペアによって生じるのが軸力なんですね。しかし，構造力学は難しいなあ。なんだか自信が無くなってきました。

私も最初はそう思ったわ。でも，軸力は一対の矢印で表される，ということさえ理解すれば，あとは簡単なのよ。元気出していこう。



Coffee　Break:　アメリカ人が混同しやすいstress（応力度）とstrain（ひずみ度）

「応力度」という言葉は日常的には使わないが,「応力」という文字からは,外から加わる力に物質が応じているというニュアンス,「度」という文字からは,「単位面積あたり」という雰囲気が感じられる。「ひずみ度」という言葉も耳にすることは少ないが,「障子のひずみ」「性格のひずみ」というように,「ひずみ」は変形した状態を表し,「度」がつくことによって「単位長さあたり」というニュアンスが感じられる。私（市之瀬）の授業でも,ひずみ度の単位をmmと間違える学生は時々見かけるが,応力度と混同する学生にお目にかかったことはない。

ところが,アメリカの学生にとっては,stressとstrainが非常にまぎらわしいようだ。手元にある辞典でstressを引くと「強調」「圧力」「(精神的) 重圧」と説明され,　strainを引くと「圧力」「(精神的) 緊張」とあり,日常的にはほとんど同じ意味で使われていることがわかる。strainでなくたとえばdeformation　ratio（変形率）みたいな用語であれば間違えにくいと思うのだが,今さら変えることは難しいんでしょうね。